Liniengeometrie und komplexe Funktionen.

Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
genehmigt von der
Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

von

Theophil Lambacher

1920

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548026_0127

Liniengeometrie und komplexe Funktionen.

Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
genehmigt von der
Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

von
Theophil Lambacher

Von der Fakultät angenommen den 30. Januar 1930.

Berichterstatter: Professor Dr. Kommerell

Mitberichterstatter: Professor Dr. Knopp

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Einleitung.

Schneidet man ein Strahlensystem mit zwei Ebenen und ordnet die Schnittpunkte der Ebenen mit derselben Geraden einander zu, so ist dadurch eine geometrische Verwandtschaft zwischen den beiden Ebenen hergestellt. Umgekehrt kann aber auch durch Verbinden entsprechender Punkte einer vorgelegten Beziehung zwischen zwei Ebenen ein Strahlensystem erzeugt werden. Bei dieser Zuordnung ist nur der Ausnahmefall zu beachten dass bei dem Schnitt eines Strahlensystems mit zwei Ebenen die Punkte der Schnittlinie derselben sich selbst entsprechen und dass im umgekehrten Falle jede der Ebene Träger von ∞^1 Geraden der Kongruenz wird. Für die folgende Untersuchung soll daher diese besondere Gerade in das Unendliche gelegt werden, d.h. die Ebenen sollen parallel sein.

Einem bestimmten geometrischen Gebilde der einen Ebene entspricht nun ein solches der anderen und man kann diese Art der Zuordnung als eine Projektion ansehen, durch die das eine Gebilde aus dem anderen hervorgeht; die Zentralprojektion ist ein Sonderfall davon, da ja ein Strahlenbündel eine besondere Kongruenz ist. Schneidet man das Strahlensystem mit beliebigen Parallel - Ebenen zu den vorhandenen Grundebenen, so ist die Frage von Interesse, welche Gebiete in diesen durch die entsprechenden Strahlen des Systems bestimmt werden, ob durch die Art der Kongruenz schon an sich bestimmte Beziehungen bestehen müssen. Umgekehrt kann auch die Frage gestellt werden, ob durch die Art der Zuordnung der Ebenen schon bestimmte Beziehungen der erzeugten Kongruenz festgelegt sind.

Für das Folgende soll nun die Zuordnung der Ebenen da - durch bestimmt sein, dass die beiden Ebenen konform auf einander abgebildet sind, d.h. dass die eine der Grundebenen als z - Ebene, die andere als w - Ebene einer analytischen Funk - tion w = f (z) betrachtet wird. Die hierdurch erzeugten Systeme sollen analytische Strahlensysteme heissen.

§ 1.

Das im Folgenden verwendete Koordinatensystem kann als eine Verallgemeinerung eines Ebenensystems aufgefasst werden; daher sollen zuerst die Ebenen Linienkoordinaten geeignet erklärt werden. Anstatt die Achsen zueinander senkrecht anzu - nehmen, seien diese Parallel im Abstand 1 gelegt und zwar so, dass sich die Nullpunkte auf einer gemeinsamen Senkrechten befinden. Irgend einem Wertepaar (x_1, u_1) entspricht dann die Verbindungslinie der beiden Punkte der Achsen, die die Abstände x_1 und u_1 von ihren Nullpunkten haben. Dieses System kann als ein besonderer Fall der soge Streifenkoordinaten aufgefasst wer - den (Salmon - Fiedler, Kegelschnitte I,5-Aufl.Seite 146).

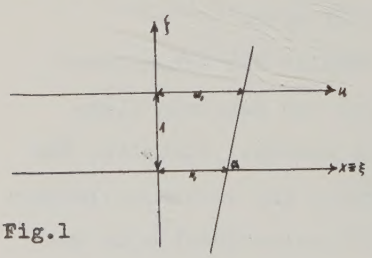

Fig.1

Ist nun u = f (x) eine gegebene mehrmals differenzierbare Funktion (die Bezeichnung ist so gewählt, dass sie später nicht mehr geändert zu werden braucht), so entspricht ihr eine Geradenschar, deren Hüllkurve als Bild der Funktion ange - sehen werden kann.

Damit man nun aus dem Bild der Funktion auf deren Verhal - ten schliessen kann, muss zunächst der Differentialquotient $\frac{du}{dx}$ gedeutet werden. Zu diesem Zwecke werde ein cartesisches Hilfssystem (ξ, ζ) so eingeführt, dass die ξ - Achse mit der x - Achse identisch ist und dass die ζ-Achse die Verbindungs- linie der beiden Nullpunkte ist. In diesem System hat die dem Wertepaar (x, u) entsprechende Gerade die Gleichung

$$\xi + \zeta(x-u) = x \,;$$

leitet man, um die Hüllkurve zu erhalten, nach x ab, so er- gibt sich

$$\zeta = \frac{1}{1 - \frac{du}{dx}} \qquad (1)$$

und damit $$\xi = \frac{u - x\cdot\frac{du}{dx}}{1 - \frac{du}{dx}} .$$

Da hier $u = f(X)$ ist, so stellt (1) die Parameterdar - stellung der Hüllkurve dar. Da die erste der Gleichungen (1) nur vom Differentialquotient abhängt, so folgt, dass der Ab- stand ζ eines Punktes der Hüllkurve ein Mass für das Steigen und Fallen der Funktion gibt, während die Tangentenrichtung ein Mass für den Unterschied der unabhängigen von der abhän- gigen Veränderlichen ist, wie aus $\cot g\,\alpha = u - x$ folgt, wobei α der Winkel zwischen der Geraden und der Posi- tiven X-Achse ist (Fig.1.)

1.) Ist $\frac{du}{dx} = 0$, so wird $\zeta = 1$; hat somit die Funktion extreme Werte, so schneidet die Hüllkurve die U - Achse.

2.) Ist $\frac{du}{dx} < 0$, so ist $0 < \zeta < 1$ d.h. die Kurve ver - läuft zwischen den Achsen ; da ferner ein Abnehmen von $\frac{du}{dx}$ auch ein solches von ζ zur Folge nat, so kann gesagt werden, dass die Funktion umso stärker fällt je näher die Hüllkurve der X-Achse liegt.

3.) Ist $0 < \frac{du}{dx} < 1$, so ist $\varsigma > 1$; wächst also die Funktion schwächer als die unabnängige Veränderliche, so verläuft die Kurve oberhalb der U - Achse.

4.) Ist $\frac{du}{dx} = 1$,so ist $\varsigma = \infty$; die Kurve hat also an diesen Stellen Asymptoten, deren Berechnung somit (mit Ausnahme der horizentalen Asymptoten) aus $\frac{du}{dx} = 1$ folgt.

5.) Ist endlich $1 < \frac{du}{dx} < \infty$, so wird ς negativ. Verläuft also die Kurve unterhalb der X - Achse, so nimmt die Funktion stärker zu als die unabhängige Veränderliche.

6.) Geht daher für wachsendes x die Kurve von oben nach unten durch die U - Achse, so hat man ein Maximum und umgekehrt.

7.) Hat $\frac{du}{dx}$ und damit auch, wie aus 1) folgt , ς einen extremen Wert, so verschwindet $\frac{d^2u}{dx^2}$; die sich aus $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$ ergebenen Werte, soweit sie Extrema von $\frac{du}{dx}$ und endlich sind, müssen daher einen Rückkehrpunkt der Hüllkurve mit nicht horizontaler Tangente liefern.

§ 2.

Einige Beispiele, die für die folgenden Betrachtungen gebraucht werden, sollen hier zusammengestellt sein.

1.) Die Linieare Gleichung $ax + bu + c = 0$ liefert $\frac{du}{dx} = -\frac{a}{b}$ und damit aus (1)

$$\xi = -\frac{c}{a+b}$$

$$\varsigma = \frac{b}{a+b}$$

also einen Punkt, der durch seine Lage das Verhalten der Funktion angibt.

2.) Die Funktion $u = x^2$ gibt $\frac{du}{dx} = 2x$ und damit aus (1) § 1

$$4\xi\varsigma + (\varsigma - 1)^2 = 0$$

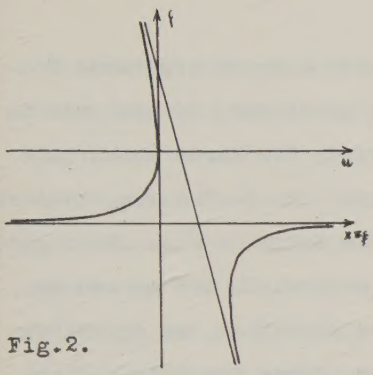

Fig.2.

also eine Hyperbel, die die X-Achse und die Gerade $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ zu Asymptoten hat. Nach § 1 folgt damit, dass die Funktion von $-\infty$ bis 0 fällt, dort ein Minimum hat und von 0 bis $\frac{1}{2}$ schwächer, von $\frac{1}{2}$ bis $+\infty$ stärker als die unabhängige Veränderliche wächst.

3.) $4ux = 1$ gibt $\frac{du}{dx} = -\frac{1}{4x^2}$; daraus folgt, dass die Kurve nur zwischen den Achsen verlaufen kann, da $\frac{du}{dx}$ immer negativ ist und dass sie für $x = \infty$ und für $x = 0$ die Achsen berührt. Um die Asymptoten zu finden, setzt man $\frac{du}{dx} = 1$ und erhält $x = \pm\frac{1}{2}i$ $u = \pm\frac{1}{2}i$ und damit für deren Richtung aus (2) § 1 $tg\,\alpha = \pm i$. Die Kurve ist daher ein Kreis, wie sich auch aus ihrer cart. Gleichung

$$\xi^2 + (\eta - \tfrac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

ergibt.

4.) $ux = 1$, $\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ unterscheidet sich von 3.) durch die Asymptoten; diese ergeben sich nämlich als $x = \pm i$, $u = \pm i$. Die Kurve ist folglich eine Ellipse. Um ihre Brennpunkte zu finden, berechnet man die Tangenten mit der Richtung $\pm i$ und bringt diese zum Schnitt; auf diese Weise ergibt sich

$$x + u = +\sqrt{3} \quad ; \qquad x + u = -\sqrt{3}\,.$$

5.) Aus $u = e^x$ folgt $\frac{du}{dx} = e^x$ und daraus nach § 1, dass die Kurve entweder oberhalb der U-Achse ($x < 0$) oder unterhalb der x-Achse ($x > 0$) verläuft. Bei $x = 0$ hat die Kurve eine Asymptote; der sich

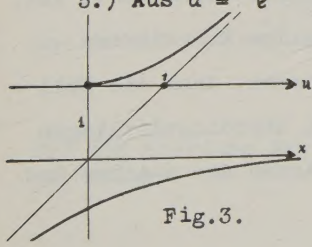

Fig.3.

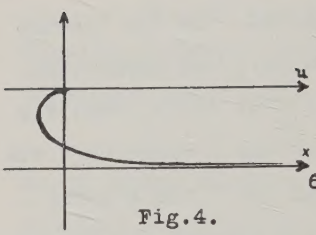

Fig.4.

im Nullpunkt der u-Achse ergebende Endpunkt ist nur scheinbar, da hier, wie in § 7 gezeigt wird, die Kurve ausserhalb der xu - Ebene eine Fortsetzung besitzt.

6.) Während die Kurve $u = e^x$ in ihrem ganzen Verlauf ausserhalb der Achsen war, liegt die Kurve $u = -e^x$ nur zwischen denselben, da der Differentialquotient nur negativ sein kann. Ueber dem Endpunkt ist dasselbe wie in 5.) zu sagen.

7.) Nach § 1,7 muss die Kurve $u = e^{\frac{1}{x}}$ an der Stelle $x = -\frac{1}{2}$ eine Spitze haben, da dort die zweite Ableitung $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{2x+1}{x^4} \cdot e^{\frac{1}{x}}$ verschwindet. Da ferner die erste Ableitung $\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$ immer negativ ist, so verläuft die Kurve nur zwischen den Achsen.

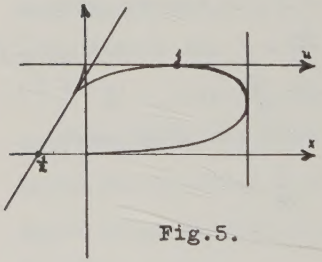

Fig.5.

§ 3.

Das bisher benützte ebene Koordinatensystem kann nun, wie bereits in § 1 erwähnt wurde, auf den Raum erweitert werden und zwar in der folgenden Weise :

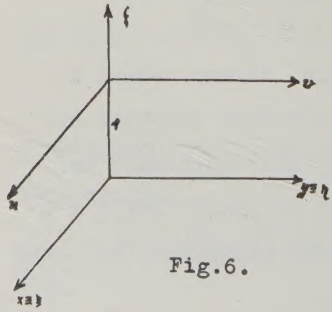

Fig.6.

In zwei zueinander parallelen Ebenen deren Abstand gleich der Einheit ist, werden rechtwinklige Koordinatenachsen so angenommen, dass die Nullpunkte senkrecht übereinanderliegen und dass die x-Achse der u-Achse und

die y-Achse der v-Achse parallel und gleich gerichtet ist. Durch die vier Grössen x,y,u,v werden dann in den beiden Ebenen (Koordinaten-Ebenen) zwei Punkte festgelegt, deren Verbindungsgerade durch diese vier Grössen somit eindeutig bestimmt ist. Wählt man $y = v = 0$, so erhält man das in 1) benützte System als Sonderfall.

Auch das in § 1 eingeführte Hilfssystem(ξ , ς) kann dadurch erweitert werden, dass man die y-Achse zugleich als η - Achse benützt; dieses System dient, ähnlich wie in § 2, einer einfachen Darstellung der aus der Zusammenfassung der Geraden entstehenden Brennflächen, Regelflächen etc.

Es sollen zuerst einige Grundformeln zusammengestellt sein; Diese gehen aus den in Salmon - Fiedler,analyt.Geometrie des Raumes I,39 angegebenen dadurch hervor, dass man dort $x_i = x_i$ $Y_i = Y_i$ $z_i = 0$ und $\cos\alpha_i = \dfrac{u_i - x_i}{\pm\sqrt{(u_i-x_i)^2 + (v_i - y_i)^2 + 1}}$ setzt.

1.) Ist p der kürzeste Abstand zweier Geraden$(x_1\, y_1\, u_1\, v_1)$ und$(x_2\, y_2\, u_2\, v_2)$, so wird

$$p = \frac{(u_2-u_1)(y_2-y_1)-(v_2-v_1)(x_2-x_1)}{\pm\sqrt{\left[(u_2-x_2)-(u_1-x_1)\right]^2+\left[(v_2-y_2)-(v_1-y_1)\right]^2+\left[(u_2-x_2)(u_1-y_1)-(v_2-y_2)(u_1-x_1)\right]^2}};$$

schneiden sich die Geraden, so folgt aus $p = 0$

$$(u_2 - u_1)(y_2 - y_1) = (v_2 - v_1)(x_2 - x_1) \qquad (1)$$

als Bedingung dafür. Setzt man $x_2 = x_1 + dx$ etc, so folgt für den Abstand zweier infinitesimal liegender Geraden

$$dp = \frac{du\cdot dy - dv\cdot dx}{\pm\sqrt{(du-dx)^2 + (dv-dy)^2 + \left[(v_1-y_1)(du-dx) - (u_1-x)(dv-dy)\right]^2}}$$

und daraus als Bedingung des Schneidens

$$du\cdot dy = dv\cdot dx\,; \qquad (2)$$

für die Richtung des kürzesten Abstandes ergibt sich

$$\cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu = \begin{vmatrix} u_1 - x_1 & v_1 - y_1 & 1 \\ u_2 - x_2 & v_2 - y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

2.) Ist γ der spitze Winkel der beiden Geraden $(x_1\, y_1\, u_1\, v_1)$ und $(x_2\, y_2\, u_2\, v_2)$, so ist

$$\cos\gamma = \frac{(u_1 - x_1)(u_2 - x_2) + (v_1 - y_1)(v_2 - y_2) + 1}{W_1 \cdot W_2}$$

wobei

$$W_i = \sqrt{(u_i - x_i)^2 + (v_i - y_i)^2 + 1}$$

gesetzt ist; daraus erfolgt als Bedingung für das senkrecht stehen der Geraden

$$(u_1 - x_1)(u_2 - x_2) + (v_1 - y_1)(v_2 - y_2) = -1.$$

3.) Besteht zwischen die vier Koordinaten x, y, u, v eine Gleichung F(x, y, u, v,) = 0, so sind nur noch drei dieser Grössen willkürlich; die Gleichung stellt damit einen Linienkomplex dar. Nimmt man z.B. in der Bedingung des Schneidens (1) zweier Geraden die Gerade$(x_1\, y_1\, u_1\, v_1)$ als fest, die andere als veränderlich an, so stellt

$$(u - u_1)(y - y_1) = (v - v_1)(x - x_1)$$

den Komplex dar, dessen Elemente die gegebene Gerade schneiden.

4.) Bestehen dagegen zwei Gleichungen zwischen den Koordinaten, so sind nur noch zwei davon unabhängig, d.h. man hat in diesem Falle eine Kongruenz; dieser Fall soll uns im Folgenden beschäftigen .

§ 4. Lassen sich die beiden Gleichungen, die eine Kongruenz bestimmen, nach u und v auflösen, also in die Form

$$u = \varphi(x, y)$$

$$v = \psi(x, y)$$

bringen, so sollen, wie schon in der Einleitung angedeutet ist, nur diejenigen Funktionen u und v betrachtet werden, die den

Cauchy - Riemannschen Differentialgleichungen $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ genügen. Unter allen möglichen Strahlensystemen sondern also diese Differentialgleichungen die Gruppe aus, die in der Einleitung als analytische Systeme bezeichnet worden ist. Ein solches System schneidet somit aus den Koordinaten-Ebenen konforme Bilder aus.

Es ist nun die Frage, durch welches geometrische Kennzeichen sich die analyt. Systeme von anderen Systemen unterscheiden ; zur Beantwortung seien die Brennpunkte eines Strahles berechnet. Die Gleichungen § 3 (2) ist die Bedingung dafür, dass sich zwei Nachbarstrahlen schneiden ; setzt man dort $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$ und $dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$, so ergibt sich

$$\frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot dx \cdot dy - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy^2 = 0$$

und hieraus mittelst der Cauchy- Riemannschen Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial y} \cdot (dx^2 + dy^2) = 0. \qquad (1)$$

Abgesehen von $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ (dieser Fall wird in § 5 besprochen) ist im allgemeinen Fall

$$dy = \pm i \cdot dx ; \qquad (2)$$

diesen Richtungen entsprechen nach § 3 (2) in der uv-Ebene die Richtungen

$$dv = \pm i \cdot du, \qquad (2')$$

wobei gleiche Zeichen zusammen gehören. Damit ist man in der Lage die rechtwinkligen Koordinaten der Brennpunkte zu berechnen; man bringt zu diesem Zwecke die beiden geraden

(3)

$$\xi = x(1-t) + tu \qquad \xi = (x+dx)(1-t') + t'(u+du)$$
$$\eta = y(1-t) + tv \qquad \eta = (y \pm i\,dx)(1-t') + t'(v \pm i\,du)$$
$$\zeta = t \qquad \zeta = t'$$

zum Schnitt und erhält

$$\xi = x + \frac{(u-x)\left(1-\frac{\partial u}{\partial x} \pm i\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\left(1-\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$$

$$\eta = y + \frac{(v-y)\left(1-\frac{\partial u}{\partial x} \pm i\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\left(1-\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} \qquad (4)$$

$$\zeta = \frac{1-\frac{\partial u}{\partial x} \pm i\frac{\partial u}{\partial y}}{\left(1-\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} .$$

Diese Gleichungen (4) geben die beiden auf der Geraden (x,y) gelegenen Brennpunkte an ; nimmt man x und y veränderlich, so ist (4) die Parameterdarstellung der beiden Brennflächen eines analyt. Strahlensystems.

Um die Natur dieser Flächen zu übersehen, schneidet man sie mit Ebenen parallel zu den Koordinatenebenen und bekommt mit $\zeta = c$ aus (4)

$$\xi = x(1-c) + cu$$

$$\eta = y(1-c) + cv,$$

wobei zwischen x und y die Bedingung

$$1 - \frac{\partial u}{\partial x} \pm i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{c}$$

besteht. Bildet man $\frac{d\eta}{d\xi}$, so folgt wegen (2) und (2')

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \pm i$$

d.h. die Schnittkurven der Brennflächen mit den Parallelebenen sind Isotrope dieser Ebenen und daher sind die Brennflächen Zylinder, deren Mantellinien den Isotropen der Koordinatenebene parallel sind. Daraus ergibt sich umgekehrt die Frage, ob auch alle Strahlensysteme, deren Brennflächen isotrope Zylinder sind, analytisch sind. Zur Beantwortung nimmt man zuerst beliebige Zylinder an und bringt die Gesamtheit ihrer gemeinsamen Tangenten mit zwei Ebenen zum Schnitt, die den Mantellinien der Zylinder parallel liegen. Dann betrachtet man die eine dieser Ebene als x y - Ebene, die andere als uv - Ebene und untersucht, unter welcher Bedingung die durch das System bestimmte Funktion analytisch ist.

Es seien $\xi = f(s)$, $\eta = 0$ und $\xi = \varphi(\tau)$, $\eta = 0$ die Leitlinien der beiden Zylinder, $\pm m$ die Richtungsfaktoren von Geraden in der $\xi\eta$-Ebene, zu denen die Mantellinien parallel sind; diese letztere Annahme ist ganz allgemein, da man durch Drehungen stets diese Lage erreichen kann. Ist s eine zunächst konstante Grösse, so ist durch

$$\begin{aligned} \xi &= s \\ \eta &= 0 \\ \zeta &= f(s) \end{aligned}$$

ein Punkt der ersten Leitlinie festgelegt; die ihm entsprechende Tangentialebene des Zylinders erhält man durch die Bemerkung, dass diese die $\xi\zeta$-Ebene in der Tangente der Leitlinie in diesem Punkt, die $\xi\eta$-Ebene in einer Geraden mit dem Richtungsfaktor + m schneidet. Dadurch ergibt sich

$$m \cdot f'(s) \cdot \xi - f'(s) \cdot \eta - m \cdot \zeta = m \cdot s \cdot f'(s) - m \cdot f(s) \qquad (5)$$

als Gleichung der Tangentialebene.

Ist andererseits durch

$$\begin{aligned} \xi &= \tau \\ \eta &= 0 \\ \zeta &= \varphi(\tau) \end{aligned}$$

ein Punkt der zweiten Leitlinie bestimmt, so berechnet sich die dadurch erhaltene Tangentialebene des zweiten Zylinders

$$m \cdot \varphi'(\tau) \cdot \xi + \varphi'(\tau) \cdot \eta - m \cdot \zeta = m \cdot \tau \cdot \varphi'(\tau) - m \varphi(\tau). \qquad (6)$$

Die Schnittgerade der beiden Ebenen(5) und (6) gehört zur Kongruenz; nimmt man nun s und τ veränderlich, so geben die beiden Gleichungen zusammen das Strahlensystem. Um die Linienkoordinaten der Schnittgeraden von (5) und(6) zu erhalten, schneidet man mit $\zeta = 0$ und mit $\zeta = 1$ und bekommt

$$\begin{aligned} x &= \frac{(s+\tau) \cdot f'(s) \cdot \varphi'(\tau) - f(s) \cdot \varphi'(\tau) - f'(s) \cdot \varphi(\tau)}{2 \cdot f'(s) \cdot \varphi'(\tau)} \\ y &= -m \frac{(s-\tau) \cdot f'(s) \cdot \varphi'(\tau) - f(s) \cdot \varphi'(\tau) + f'(s) \cdot \varphi(\tau)}{2 \cdot f'(s) \cdot \varphi'(\tau)} \end{aligned} \qquad (7)$$

$$u = x + \frac{f'(s) + \varphi'(\tau)}{2 \cdot f'(s) \cdot \varphi'(\tau)} \qquad v = y + m \cdot \frac{f'(s) + \varphi'(\tau)}{2 \cdot f'(s) \cdot \varphi'(\tau)}$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$x - \frac{y}{m} = s - \frac{f(s)}{f'(s)} \qquad (8)$$
$$x + \frac{y}{m} = \tau - \frac{\varphi(\tau)}{\varphi'(\tau)},$$

wobei wesentlich ist, dass die rechte Seite je nur von s bezw. τ abhängig ist.

Man bildet nun in (7) die Partiellen Ableitungen von u und v nach x und y und ersetzt die darin auftretenden Ab-. leitungen $\frac{\partial s}{\partial x}$, $\frac{\partial s}{\partial y}$, $\frac{\partial \tau}{\partial x}$, $\frac{\partial \tau}{\partial y}$ aus (8), nach dem diese Gleichun - gen partiell nach x und y abgeleitet sind; auf diese Weise ergibt sich

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{f(s)} + \frac{1}{\varphi(\tau)}\right] \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2m}\left[\frac{1}{f(s)} - \frac{1}{\varphi(\tau)}\right]$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = 1 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{f(s)} + \frac{1}{\varphi(\tau)}\right] \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{m}{2}\left[\frac{1}{f(s)} - \frac{1}{\varphi(\tau)}\right].$$

Die Erste der beiden Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ist also für jedes m richtig, d.h. besteht bei jedem Strahlensystem, dessen Brennflächen Zylinder sind, während sich für die zweite dieser Gleichungen

$$m^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

ergibt. Aus dieser Beziehung folgt aber sofort

$$m^2 = -1$$
$$m = \pm i.$$

Zusammen mit dem Ergebnis der Gleichungen (4) kann daher der Folgende umkehrbare Satz aufgestellt werden :

I. Schneidet man ein Strahlensystem mit zwei zu einander parallelen Ebenen und ordnet die auf derselben Geraden liegenden Schnittpunkte einander zu, so ist die Abbildung dann und nur dann konform, d.h. das System

nur dann analytisch, wenn die Brennflächen des Systems Zylinder sind, deren Mantellinien den Isotropen der Ebenen parallel verlaufen.

Nun können aber nicht, wie es scheinen möchte, ganz beliebige Leitlinien genommen werden, da doch die Grössen x,y,u,v reell sein müssen. Aus den Gleichungen (7) folgt nämlich, dass wegen dieser Forderung s und τ, f (s) und $\varphi(\tau)$ sowie deren Ableitungen konjugiert komplex sein müssen. Sind also $f(\xi)$ und $\varphi(\xi)$ reelle Funktionen, so müssen sie identisch sein.

§ 5. Die Schnittlinie der beiden Zylinder (4) § 4, die als die (gemeinsame) Leitlinie aufgefasst werden kann, soll die Brennlinie des Strahlensystems heissen. Nach dieser Erklärung sind die Punkte der Brennlinie zusammenfallende Brennpunkte, d.h. die betreffenden Strahlen sind Tangenten derselben. Aus den Gleichungen (4) § 4 ergibt sich damit, dass die beiden Brennpunkte nur dann zusammen fallen können, wenn

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (1)$$

ist; die Brennlinie ist also, wie ebenfalls aus diesen Gleichungen folgt, stets reell.

II. Diejenigen Strahlen des Systems, die die xy-Ebene in Punkten der Kurve $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ schneiden, bilden eine abwickelbare Regelfläche, deren Gratlinie die Brennlinie des Systems ist.

Die Gleichung (1) § 4 ist damit vollständig diskutiert.

Schneidet man nun das Strahlensystem mit Parallelebenen zu den Grundebenen, d.h. nimmt man t - konstant , so ist in jeder dieser Ebenen eine Abbildung bestimmt. Um festzustellen, ob dieser wieder konform ist, bildet man aus (3) § 4 die Partielle

Ableitungen und erhält mit Hilfe der Cauchy-Riemannschen Gleichungen

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1 - t + t\cdot\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -t\cdot\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (2)$$
$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = t\cdot\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \frac{\partial \eta}{\partial y} = 1 - t + t\cdot\frac{\partial u}{\partial x} \;;$$

da für diese Gleichungen die Beziehungen

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

erfüllt sind, so besteht der Satz

III. ein analytisches Strahlensystem schneidet aus allen Parallelebenen zu den Grundebenen konforme Bilder aus.

Für die singulären Punkte der so bestimmten Funktionen folgt aus (2) wegen $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{t-1}{t}\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0\;;$$

wegen der zweiten dieser Gleichungen besagt das Ergebnis, dass die Brennlinie der Ort aller singulären Punkte der in den Parallelebenen durch das Strahlensystem bestimmten Funktionen ist. Diese Eigenschaft gilt natürlich auch für die uv-Ebene $t = 1$. Der Abstand der Grundebenen hat somit auf den Charakter des Systems als analytisches keinen Einfluss.

§ 6. Diesen allgemeinen Betrachtungen soll zunächst die Besprechung einiger besonderer analytischen Systeme folgen.

1.) Die Funktion , die die beiden Grundebenen einander zuordnet, sei die ganze linieare Funktion $w=a+bz$, wobei $a = a_1+ia_2$ und $b = b_1+ib_2$ Komplexezahlen sind. Daraus ergibt sich

$$u = a_1 + b_1 x - b_2 y$$
$$v = a_2 + b_2 x + b_1 y$$

und damit $\frac{\partial u}{\partial x} = b_1 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -b_2$

Für die Brennflächen folgt aus (4) § 4

$$\xi = \frac{(1-b_1 \mp i b_2)\left[a_2 \pm i b_2 (x \pm iy)\right]}{(1-b_1)^2 + b_2^2}$$

$$\eta = \frac{(1-b_1 \mp i b_2)\left[a_2 + b_2 (x \pm iy)\right]}{(1-b_1)^2 + b_2^2}$$

$$\zeta = \frac{1 - b_1 \mp i b_2}{(1-b_1)^2 + b_2^2}$$

d.h. die Zylinder sind zu Geraden, den Leitgeraden ausgeartet, da der der Schnitt mit einer Ebene z.B. der $\xi\zeta$ -Ebene je ein Punkt ist. Sollen sich die Geraden schneiden, so müssen sie in einer Ebene liegen, d.h. es muss $b_2 = 0$ sein; unter dieser Annahme berechnet sich die Brennfläche als

$$\xi = \frac{a_1}{1 - b_1}$$

$$\eta = \frac{a_2}{1 - b_1}$$

$$\zeta = \frac{1}{1 - b_1}$$

woraus folgt, dass das System ein Strahlensystem ist. Ein Strahlenbündel wird also erzeugt durch die Funktion $w = a + bz$, wenn a komplex, b dagegen reell ist. Es kann noch hinzu gefügt werden dass im Falle des Bündels $\frac{\partial u}{\partial y}$ identisch verschwindet; das Strahlenbündel ist also ein besonderes analytisches System.

II. Das System $w=z^2$ ergibt aus $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y = 0$,dass die Brennlinie die in § 2,2 gezeichnet Hyperbel $u=x^2$ ist ; die durch $y=0$ bestimmte Regelschar ist somit die einzige des Systems, die eine Gratlinie bildet. Die Brennflächen erhält man dadurch, dass man durch alle Punkte der Hyperbel(Fig.?) zu den Isotropen der Grundebenen die Parallelen zieht.

Für die Brennpunkte eines Strahles(x,y) ergeben die Gleichungen(4) § 4

$$\xi = x + \frac{(x^2 - y^2 - x)(1 - 2x \mp 2iy)}{(1-2x)^2 + 4y^2}$$

$$\eta = y + \frac{(2x-1)\cdot y \cdot (1 - 2x \mp 2iy)}{(1-2x)^2 + 4y^2}$$

$$\zeta = \frac{1 - 2x \mp 2iy}{(1-2x)^2 + 4y^2}$$

woraus die Koordinaten des Mittelpunktes des Strahles (x, y) als

$$\begin{aligned} \xi &= x + \frac{(x^2-y^2-x)(1-2x)}{(1-2x)^2+4y^2} \\ \eta &= \frac{4y^3}{(1-2x)^2+4y^2} \\ \zeta &= \frac{1-2x}{(1-2x)^2+4y^2} \end{aligned} \qquad (1)$$

folgen. Fast man hierin x und y als Veränderliche auf, so ist (1) die Parameterdarstellung der Mittelfläche des Systems. Durch Elimination von x und y ergibt sich die Gleichung derselben als

$$64\zeta^2\left[\left(\xi+\frac{(1-\zeta)^2}{4\zeta}\right)^2+\eta^2\right]^2-16\zeta\left[\xi+\frac{(1-\zeta)^2}{4\zeta}\right]\left[\left(\xi+\frac{(1-\zeta)^2}{4\zeta}\right)^2+\eta^2\right]-\eta^2=0.$$

Die Schnittkurve dieser Fläche mit Parallelebenen zu den Grundebenen sind Kardioiden, deren Spitzen auf der Brennlinie liegen; sie sind symetrisch zur $\xi\zeta$-Ebene und ihre anderen Schnittpunkte mit dieser Ebene erfüllen die Asymptote der Brennlinie.

III. Um die Brennlinie von $w = \frac{1}{z}$ zu finden, bindet man $\frac{\partial u}{\partial y} \equiv \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0$. Daraus folgt, dass die Brennlinie aus zwei Teilen besteht, da sowohl $x = 0$ als auch $y = 0$ sich als Bedingung dafür ergibt. Der erste Teil ist die in § 2,4 angegebene Ellipse mit den Halbachsen 1 und $\frac{1}{2}$, der zweite Teil $v = -\frac{1}{y}$ entsprechend einer Hyperbel mit denselben Halbachsen; die Asymptoten der Hyperbel ergeben sich nach § 1.4 aus $\frac{1}{y^2} = 1$ Als $y = \pm 1$, $v = \mp 1$.

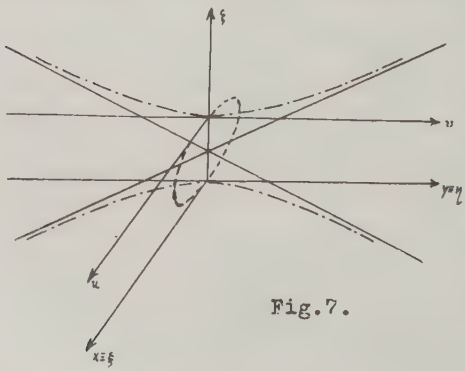

Fig.7.

IV. Für die Funktion $w = z^n$ sei noch eine Eigenschaft der Brennlinie abgeleitet; da für dieselbe der imaginäre Teil der ersten Ableitung verschwinden muss(§ 5 (1)) , so führt man am besten in den Grundebenen Polarkoordinaten (r, φ) bezw. (R, Φ) ein. Aus $\frac{dw}{dz} = n z^{n-1} = n r^{n-1} (\cos(n-1)\varphi + i \sin(n-1)\varphi)$ folgt damit, $\sin(n-1)\varphi = 0$ und daraus

$$\varphi = \frac{K\pi}{n-1}$$

$$\Phi = \frac{nK\pi}{n-1} \quad .$$

(k ganzzahlig)

Bildet man den Unterschied diesen beiden Winkel, so kommt

$$\Phi - \varphi = K\pi$$

d.h. die zugehörigen Geraden der Grundebenen liegen immer in einer Ebene. Für die Brennlinien folgt daher, dass sie immer ebene Kurven sind, bezw. aus ebenen Kurven zusammengesetzt sind. Aus einer einzigen ebenen Kurve besteht die Brennlinie dann, wenn n ein Bruch ist, dessen Zähler und Nenner sich um die Einheit unterscheiden.

§ 7. Es sollen nun entsprechend transzendente Funktionen behandelt werden.

1.) Aus $w = e^z$ folgt durch Trennen von Reellem und Imaginären

$$u = e^x \cos y \qquad v = e^x \sin y$$

und daraus als Bedingung der Brennlinie $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = 0.$

Da der erste Faktor für endliches x nie verschwinden kann, so ist nur $y = K\pi$ möglich. Für alle diese Werte ist w reell. Es sind nun zwei Typen von Kurvenzweigen zu unterscheiden ; hat nämlich y den Wert $2k\pi$,so ergibt sich $u = e^x$,für $y = (2k+1)\pi$ dagegen $u = -e^x$. Die dadurch bestimmten Kurven sind in § 2 besprochen worden(Fig.3 u.Fig.4.); die sich jetzt ergebenen Teile der Brennlinie unterscheiden sich von diesen Kurven

nur durch den Abstand der beiden Koordinaten-Achsen, der in § 2 als die Einheit angenommen ist. Setzt man die einzelnen Kurvenzweige zusammen, so fügen sich die bis dahin freien Endpunkte aneinander, sodass also die Brennlinie stätig verläuft; die Endpunkte sind folglich nur solche für einen Teil in seiner Ebene, nicht aber für die gesamte Kurve. Legt man von einem Punkt der u-Achse aus Tangenten an die Brennlinie, so haben deren Schnittpunkte mit der xY-Ebene alle dieselbe Abszisse x, während die Ordinaten y sich je um 2π unterscheiden; durch die Brennlinie ist also eine Deutung der Periodizität der Exponentialfunktion gewonnen. In Figur 8 ist ein Zweig der Brennlinie gezeichnet.

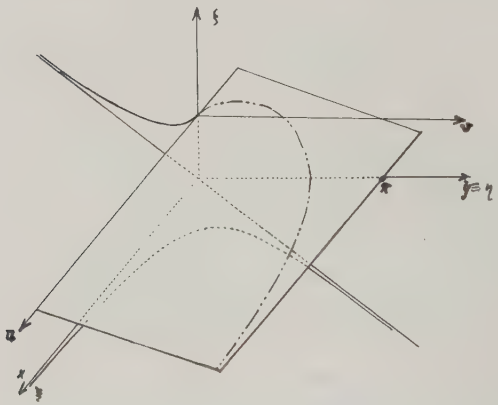

Fig.8.

II. Trennt man in $w = lg\, z$ Reelles und Imaginäres, so kommt

$$u = \tfrac{1}{2} lg\,(x^2+y^2) \qquad v = arc\,tg\,\tfrac{y}{x}$$

dann folgt aus $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ die Bedingung $y = 0$ und damit $u = lg\, x$ und $v = K\pi$.

Für $y = 0$ kann man nun schreiben

$$w = lg\, x + i\,2K\pi$$

oder

$$w = lg(-x) + i(2K+1)\pi$$

und man wird die erste Form für positive x , die zweite für negative x gebrauchen; es gibt somit zwei Arten von Kurven $u = lgx$ und $u = lg(-x)$. Die erste Kurve verläuft nur ausserhalb

der Achsen, die zweite nur innerhalb derselben, da der Differentialquotient $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ für die erste Kurve immer positiv (da für negative x die Funktion imaginär würde) und für die zweite immer negativ ist(§ 1.) Die beiden sich ergebenden Kurven sind dieselben wie bei e^z, nur dass die Achsen vertauscht sind.

Zieht man von einem beliebigen Punkt der x-Achse aus Tangenten an die Brennlinie, so gibt es deren unendlich viele; die Schnittpunkte dieser Tangenten mit der uv-Ebene unterscheiden sich nur in den Ordinaten v, wie sich unmittelbar aus (1) ergibt,sodass also durch die Brennlinie eine reelle Deutung der Vieldeutigkeit des Logarithmus gegeben ist.

§ 8. Wie schon in der Einleitung gesagt wurde, sollen jetzt die analytischen Strahlensysteme dazu dienen, um Kurven der xy-Ebene zu projizieren.; als Projektionsebene kommen die Parallelebenen zu den Grundebenen in Frage, da in § 5 gezeigt wurde, dass die analyt.Systeme aus diesen konforme Bilder ausschneiden.

1.) Nimmt man alle Strahlen eines Systems, die die xy-Ebene in einer vorgegebenen Kurve $y = \varphi(x)$ schneiden, und bringt die zugeordnete Regelfläche mit allen Parallelebenen $\zeta = t$ zum Schnitt, so entsteht eine Kurvenschar, die gemeinsame Eigenschaften aufweist. Diese Eigenschaften hängen sowohl von der Art der Kurve $y = \varphi(x)$ als auch von dem projizierenden Strahlensystem ab.

Die Zusammenfassung einzelner Kurven zu einer Schar geschieht gewöhnlich unter dem Gesichtspunkt der gleichen Erzeugung, während sie hier als Folge der Projektion der gleichen

Kurve mit demselben Strahlensystem erscheint. Rollkurven, Fusspunktskurven und ähnliches werden, wie die folgenden Beispiele zeigen, auf diese Weise alle gleichartig ernalten; die Erzeugung durch Projektion hat also neben anderen Vorteilen die Einheitlichkeit den anderen Erzeugungen voraus.

2.) Projiziert man zwei zueinander orthogonale Scharen der xy-Ebene auf eine bestimmte Parallelebene, so entstehen nach dem Satz III § 5 wieder 2 orthogonale Scharen, die ausserdem noch wie in (3) bewiesen wird konfokal sind.

3.) Für die Abbildung einer Kurve der xy-Ebene auf eine Parallelebene $\xi = t$ gilt ein für die Diskussion wichtiger Satz :

IV. Ist $y = \varphi(x)$ eine Kurve der xy-Ebene, so hat die durch Projektion entstandene Kurve die Schnittpunkte ihrer Trägerebene mit der Brennlinie des projizierenden Strahlensystems zu Brennpunkten.

Ist nämlich t constant, so stellen die Gleichungen (3) § 4 zusammen mit $y = \varphi(x)$ die Projektionskurve dar; um deren Brennpunkte zu finden, bestimmt man ihre Isotropen-Tangenten und bringt diese zum Schnitt. Auf diese Weise erhält man als Bedingung dafür, dass $\frac{d\eta}{d\xi} = \pm i$ ist:

$$(1-t)\cdot\varphi'(x) + t\left(-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\varphi'(x)\right) = \pm i\left[1-t+t\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\varphi'(x)\right)\right]$$

oder

$$(\varphi'(x) \pm i)\left(1-t+t\frac{\partial u}{\partial x} \pm i\,t\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Löst man den zweiten Klammerausdruck nach t auf , so kommt

$$t = \frac{1-\frac{\partial u}{\partial x} \pm i\,\frac{\partial u}{\partial y}}{\left(1-\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$$

beachtet man auch, dass $\zeta = t$ ist, so besagte diese Gleichung nach (4) § 4 , dass die in der Ebene $\zeta = t$ liegenden Mantellinien der Brennzylinder die Projektionskurve berühren und dass daher ihre Schnittpunkte, die aber der Brennlinie angehören, Brennpunkte dieser Kurven sind. Der erste Klammerausdruck der obigen Gleichung gibt noch weitere, nur von der Grundkurve $y = \psi(x)$ abhängige Brennpunkte; da sich nämlich die Isotropenrichtungen in allen Parallelebenen entsprechen (§ 4 (2) u. (2')), so liefern die Isotropen Tangenten an die Kurve $y = \psi(x)$ durch Projektion wieder Isotropen-Tangenten, woraus folgt, dass auch die Schnittpunkte dieser Tangenten ebenfalls entsprechen. Dies besagt, dass diejenigen Strahlen, die die xy-Ebene in den Brennpunkten der Kurve $y = \psi(x)$ schneiden, in den Parallel-Ebenen ebenfalls Brennpunkte der Projektionskurven bestimmen.

IV' Die Brennpunkte der Projektionskurven werden also dadurch erhalten, dass man ihre Trägerebene mit der Brennlinie und mit den von den Brennpunkten der Grundkurve ausgehenden Strahlen zum Schnitt bringt.

Durch diesen Satz ist der Zusammenhang hergestellt, der zwischen den Brennpunkten ebener Kurven und den singulären Punkten analyt. Funktionen besteht; auch hat damit die gewöhnliche Brennpunktsberechnung insofern eine Begründung gefunden, da ja die in der Trägerebene gelegenen Mantellinien der Brennzylinder isotrop sind.

4.) Ist P ein Punkt der Ebene $\zeta = t$, so gehen i.a. mehrere Strahlen des Systems durch ihn hindurch, d.h. P wird von mehreren Punkten der xy-Ebene aus projiziert. Daher kann eine Kurve, die durch Projektion von $y = \psi(x)$ in die Ebene $\zeta = t$ entstanden

ist, noch aus mindestens einer anderen Kurve $y = \psi(x)$ erhalten werden ; der Zusammenhang zwischen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ist durch di e Art des projizierenden Strahlensystems bestimmt.

Die Schnittpunkte der Grundkurve $y = \varphi(x)$ und $y = \psi(x)$, die dieselben Projektion ergeben, werden zu Doppelpunkten der Projektionkurve, da diese bestimmenden Strahlen zu beiden projizierenden Regelscharen gehören. Sind also z.B. die beiden Grundkurven Kreise, so wird die Projektionskurve in den beiden Kreispunkten Doppelpunkte haben, deren Tangenten sich in den ausserordentlichen Brennpunkten, den Projektionen der Kreis - mittelpunkte, schneiden (§ 4 (2) und Satz IV').

Zusammen mit Satz IV ist damit der Einfluss des projizierenden Strahlensystems auf die entstehende Projektionskurve ge - zeigt.

5.) Nun ist noch über die Orthogonalität zweier Kurvenscharen der Ebene $\zeta = t$, die durch Projektion von solchen in der xY-Ebene erhalten wurden, eine Bemerkung zu machen. Es seien $y = g_1(x)$ und $y = h_1(x)$ zwei zu einander Orthogonale Kurven der xy-Ebene; ferner seien $y = g_2(x)$ und $y = h_2(x)$ zwei Kurven, die dieselbe Projektionskurve in der Ebene $\zeta = t$ ergeben, wie $y = g_1(x)$ bezw. $y = h_1(x)$. Dann sind zwei Fälle denkbar :

a.) $y = g_1(x)$ und $y = h_2(x)$ schneiden sich ebenfalls senkrecht und ebenso $y = g_2(x)$ und $y = h_1(x)$; die erzeugten Projektions kurven werden gemäss Satz III überall orthogonal sein. Dieser Fall tritt ein, wenn $y = g_1(x)$ und $y = g_2(x)$ derselben zu $y = h_1(x)$ orthogonalen Schar angehören und umgekehrt. Man erhält dann durch Projektion ein vollständiges Orthogonalsystem in der Ebene $\zeta = t$.

b.) $y = g_1(x)$ und $y = h_2(x)$ schneiden sich nicht recht -

winklig; dann liefert der Satz III, dass die entstehenden Projektionskurven sich nur in einem Teil der Schnittpunkte senkrecht schneiden in einem anderen dagegen nicht. Zusammenfassend kann daher der Satz aufgestellt werden :

V. Zwei Orthogonale Kurvenscharen der xy-Ebene liefern nur dann ein vollständiges Orthogonalsystem der Ebene $\zeta = t$, wenn die verschiedenen Kurven der xy-Ebene, die dieselben Projektionskurve erzeugen, derselben Kurvenschar angehören.

Zwei Orthogonale Scharen der xy-Ebene können also je nach ihrer Lage in dieser Ebene, ein vollständiges Orthogonalsystem in der Ebene $\zeta = t$ erzeugen oder nicht ; die folgenden §§ geben Beispiele zu beiden Fällen.

§ 9. Als projizierendes System diene zuerst $w = z^2$, das in §6,2 besprochen wurde und dessen Brennlinie die Hyperbel Fig.2 ist.

1.) Als Grundkurve sei der Kreis

$$x = r\cdot\cos\varphi \qquad (1)$$
$$y = r\cdot\sin\varphi$$

der xy-Ebene gewählt ; ihm entspricht in der zweiten Grundebene der Kreis

$$u = r^2\cdot\cos 2\varphi \qquad (2)$$
$$v = r^2\cdot\sin 2\varphi .$$

Schneidet man die projizierenden Strahlen des Systems mit der Ebene $\zeta = t$, so entsteht nach § 4 (3)

$$\xi = r(1-t)\cdot\cos\varphi + tr^2\cdot\cos 2\varphi \qquad (3)$$
$$\eta = r(1-t)\cdot\sin\varphi + tr^2\cdot\sin 2\varphi$$
$$\zeta = t$$

als Parameterdarstellung der Projektionskurve. Nach Satz IV kann gesagt werden, dass dieselbe als Brennpunkt den

Schnitt von $\zeta = t$ mit der Hyperbel Fig.2 und ausserdem noch einen solchen in Unendlichen hat(die Ebene $\zeta = t$ ist der einen Hyperbelasymptote parallel. Der Brennpunkt liegt also in

$$\xi = -\frac{(1-t)^2}{4t} \qquad \eta = 0 \qquad (4)$$

Da die Kurve (3) , wie in (9) gezeigt wird, noch aus einem zweiten Kreis der xy-Ebene projiziert wird, so folgt, dass sie in den Kreispunkten Doppelpunkte besitzt; da ferner, wie sich ebenfalls in (9 ergibt, die beiden Kreismittelpunkte denselben Projektionspunkt, also den ausserordentlichen Brennpunkt,liefern, so besagt dies, dass die Kurve (3) in den Kreispunkten Spitzen hat. Die Kurve (3) (r u. t constant) liegt symmetrisch zur ξ -Achse; die Schnittpunkte ergeben sich aus

$$\sin\varphi \cdot (1 - t + 2tr\cdot\cos\varphi) = 0.$$

Durch den Klammerausdruck sind i.a. zwei Projektionsstrahlen bestimmt, da $\cos\varphi = \cos(-\varphi)$ ist; beide Strahlen geben denselben Punkt $(-tr^2, 0)$, der also Doppelpunkt der Kurve ist. Macht man ihm zum Nullpunkt,so kommt aus (3)

$$\xi' = r\cdot(1 - t + 2tr\cdot\cos\varphi)\cdot\cos\varphi$$
$$\eta = r\cdot(1 - t + 2tr\cdot\cos\varphi)\cdot\sin\varphi$$

oder , wenn (ϱ , ϑ) Polarkoordinaten bezüglich dieses Punktes sind

$$\varrho = r(1-t) + 2tr^2\cos\vartheta.$$

Die Projektionskurve ist also eine Pascalsche Schnecke.

Nimmt man t veränderlich, d.h. projiziert den Kreis (1) auf alle Parallelebenen, so erhält man die Schar der Pascalschen Schnecken.; der Erzeugung derselben als Kreisfusspunkts - oder als Rollkurven ist jetzt diejenige durch Projektion gegenübergestellt, bei der die Brenn - und Doppelpunkte ohne Weiteres mitbestimmt sind.

Da alle Doppelpunke auf der Geraden $\xi = -r^2 f$, $\eta = 0$ liegen, so sind unter den Kurven immer zwei, deren Doppel - und Brennpunkte zusammen fallen, da diese Gerade die Brennlinie zwei - mal schneidet ; diese Kurven sind Kardioiden.

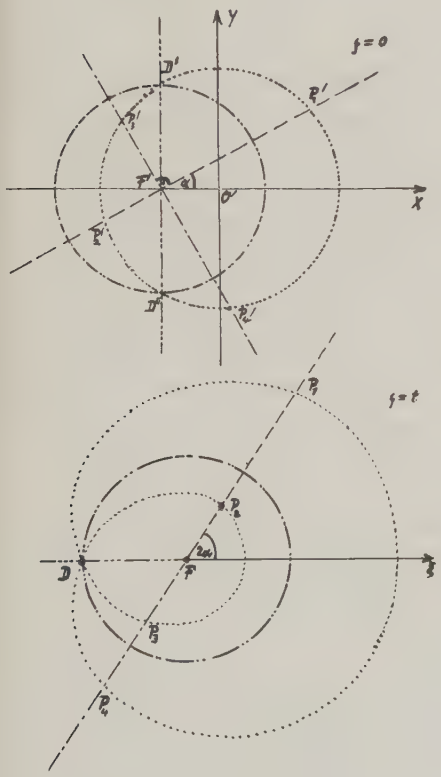

Fig.9.

2.) Sind F',D' und D'' diejenigen punkte der xy-Ebene, die in den Brennpunkt F und den Doppelpunkt D der Ebene $f = t$ projiziert wer - den, so ergibt sich für deren Abszisse der gemeinse Wert $x = -\frac{1-t}{2t}$ d.h.die drei Punkte liegen auf einer Parallelen zur y-Achse. Zieht man dann durch F' die Gerade $P_1' P_2'$, die mit der x-Achse den Winkel α bildet, und deren Senkrechte $P_3' P_4'$ in F', so projizieren sich, wie eine kleine Rechnung zeigt, die Endpunkte nach P_1, P_2, P_3 und P_4 so, dass diese Punkte in einer Geraden durch F liegen, die mit der Achse den Winkel 2α bildet. Allgemein projizieren sich Gerade durch F' in diejenige Ebene $f = t$ und nur in diese wieder in Gerade, wenn sich F' in F, den Schnitt der Brennlinie mit der Ebene, projiziert; diese Geraden haben dann entsprechend dem Stranlensystem den doppelten Neigungswinkel wie die ursprünglichen. Der Konformität wegen wird dann der Kreis um F' durch D' und D'' in den Kreis um F' durch D projiziert; dieser Kreis soll der Brenn -

punktskreis der Schnecke heissen .

Der Sehnensatz

$$F'P_1' \cdot F'P_2' = F'P_3' \cdot F'P_4' = \overline{F'D'}^2$$

bleibt bei der Projektion erhalten und liefert die anallagmatische Eigenschaft der Schnecken

$$FP_1 \cdot FP_2 = FP_3 \cdot FP_4 = \overline{FD}^2.$$

3.) Ist E der Gegenpunkt zu D auf dem Brennpunktskreis und

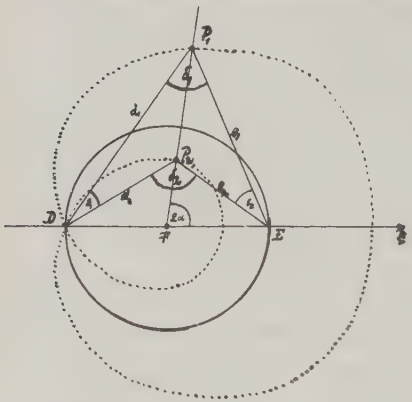

Fig.10.

zieht man $DP_1 = d_1$, $DP_2 = d_2$ $EP_1 = e_1$, $EP_2 = e_2$, so folgt aus dem Dreieck D P_1 P_2, wenn man noch $FP_1 = \varrho_1$ und $FP_2 = \varrho_2$ setzt,

$$2 d_1 \cdot d_2 \cos \varepsilon_1 = d_1^2 + d_2^2 - (\varrho_1 - \varrho_2)^2.$$

Setzt man DF = f, so ist $\varrho_1 \cdot \varrho_2 = f^2$; und da

$$d_1^2 = f^2 + \varrho_1^2 + 2f\varrho_1 \cdot \cos 2\alpha$$

$$d_2^2 = f^2 + \varrho_2^2 + 2f\varrho_2 \cdot \cos 2\alpha$$

sich aus dem Dreieck DFP_1 und DFP_2 ergibt, so folgt damit

$$d_1 d_2 \cdot \cos \varepsilon_1 = 2f^2 + f(\varrho_1 + \varrho_2) \cos 2\alpha$$

und ebenso $$e_1 e_2 \cdot \cos \varepsilon_2 = 2f^2 - f(\varrho_1 + \varrho_2) \cos 2\alpha.$$

Durch Addition ergibt sich daraus

$$d_1 d_2 \cdot \cos \varepsilon_1 + e_1 e_2 \cos \varepsilon_2 = 4f^2, \qquad (5)$$

d.h.die Summe der Skalaren Produkte der Vektoren DP_1 und DP_2 bezw. EP_1 und EP_2 ist gleich dem skalaren Produkt des Vektors DE mit sich selbst.

Wählt man die Ebene $\zeta = 1$ als Projektionsebene, so geht die Schnecke in den Kreis (2) über ; da dann DP_1 mit DP_2 und EP_1 mit EP_2 zusammen fällt, so heisst der Satz

$$\overline{DP}^2 + \overline{EP}^2 = \overline{DE}^2.$$

Der Satz (5) ist also eine Verallgemeinerung des pythagoräi-

schen Satzes für die Schnecken und enthält diesen als Sonderfall.

4.) Da für jeden Winkel (Fig.10)

$$FP_1 \cdot FP_2 = \overline{DF}^2 = \tfrac{1}{4}\overline{DE}^2$$

ist, so werden wegen des Tangentensatzes die Kreise durch P_1, P_2 und D durch P_1, P_2 und E die Gerade $\mathfrak{D}$ in D bezw. E berühren; daher ist, wenn man $\sphericalangle DP_1E = \delta_1$ und $\sphericalangle DP_2E = \delta_2$ setzt

$$\sphericalangle DP_1P_2 = \sphericalangle EDP_2$$
$$\sphericalangle EP_1P_2 = \sphericalangle DEP_2$$
$$\delta_2 = \sphericalangle DP_2P_1 .$$

Durch Addition ergibt sich damit

$$\delta_1 + \delta_2 = 180^\circ .$$

Diese Eigenschaft ist eine Verallgemeinerung des Thales - satzes, der daraus für $\varrho = 1$ folgt, da in diesem Falle $\delta_1 = \delta_2 = 90^\circ$ wird.

5.) Für das Folgende ist wichtig, die Bedingung zu kennen, unter der sich zwei Strahlen des Systems schneiden, d.h. wie zwei verschiedene Punkte der xy-Ebene liegen müssen, damit sie sich in demselben Punkt projizieren. Aus der Bedingung des Schneidens § 3 (1) folgt:

$$(x_2^2 - y_2^2 - x_1^2 + y_1^2)(y_2 - y_1) = (2x_2y_2 - 2x_1y_1)(x_2 - x_1)$$

oder $$(y_2 + y_1)\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\right] = 0.$$

Abgesehen von dem zweiten Faktor , der auf die Brennflächen führt (§ 4) schneiden sich also zwei Strahlen des Systems dann, wenn die Ordinaten ihrer Schnittpunkte mit der xy-Ebene entgegengesetzt gleich sind.

6.) Projiziert man die Gerade y= c, so ergibt sich aus § 4, 3 in der Ebene $\varrho = t$ die Parabel

$$\varrho^2 = 4c^2t\varrho + (1-t)^2c^2 + 4c^4t^2.$$

Da diese Gleichung in c von geradem Grade ist, so ergibt die

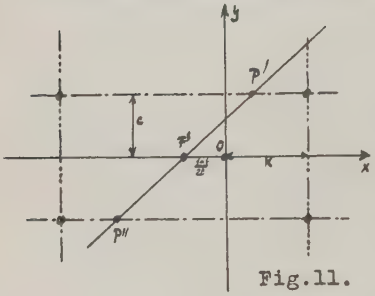

Fig.11.

die Gerade $y = \quad - c$ dieselbe Parabel. Nun projiziert sich eine Gerade durch F' nach 2) in einem Strahl durch F unter Verdoppelung der Winkel; daher müssen die Punkte P' und P" (Fig. 11) den gleichen Punkt P der Parabel ergeben. Projiziert sich ein Punkt P' der xy-Ebene in einem Punkt P der Ebene $\zeta = t$ und F' nach F, den Brennpunkt dieser Ebene, so ergibt derjenige Punkt P" denselben Punkt P, der zur P' bezüglich F' symmetrisch liegt.

7.) Die Gerade $x=\kappa$ ebenso wie die Gerade $x = -\kappa - \frac{1-t}{t}$ (es ist $OF' = -\frac{1-t}{2t}$ aus 2.)) ergeben also dieselbe Projektionskurve und zwar die Parabel

$$\eta^2 = -\frac{1}{t}(1-t+2\kappa t)^2\left[\xi - \kappa(1-t+\kappa t)\right],$$

wie durch Einsetzung der entsprechenden Werte in § 4 (3) folgt. Von den vier Schnittpunkten der vier Geraden projizieren sich nach 6) je zwei in demselben Punkt, sodass die Parabeln also nur zwei endliche Schnittpunkte haben, in denen sie sich nach Satz III rechtwinklig schneiden.

Nimmt man c u. κ veränderlich, t dagegen fest, so erhält man die Schar der konfokalen Parabeln mit derselben Symmetrieachse; es liegt somit ein vollständiges Orthogonalsystem vor.

8.) Projiziert man die Gerade $y = x \cdot tg\varphi$, so muss sich nach 6) dieselbe Kurve ergeben, wie aus $y = tg\varphi \cdot (x + \frac{1-t}{t})$ und zwar erhält man die Projektionskurve aus (3), wenn man dort r veränderlich und φ constant nimmt; es kommt dann durch Elimination von r die Parabel

$$(\xi \cdot \sin 2\varphi - \eta \cos 2\varphi)^2 = \frac{(1-t)^2}{t} \cdot \sin\varphi\,(\eta\cos\varphi - \xi \sin\varphi), \qquad (6)$$

deren Symmetrieachse durch F geht und die Neigung 2 φ besitzt. Projiziert man alle Ursprungs-Geraden der xy-Ebene auf dieselbe Ebene $\zeta = t$, so erhält man eine konfokale Parabelschar, für die der Nullpunkt dieser Ebene ein gemeinsamer Punkt ist. Daraus folgt aber, dass sämtliche Leitlinien den Kreis um O mit OF berühren.

9.)

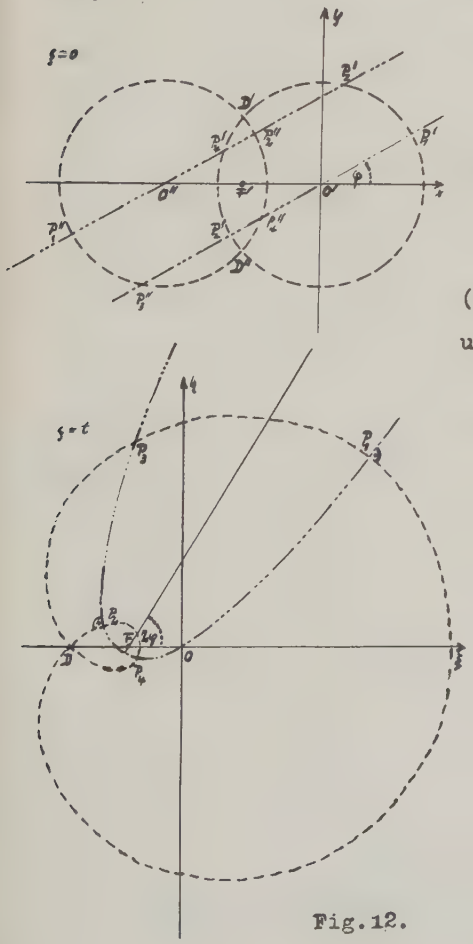

Fig.12.

Nach dem Ergebnis von 6) wird die Pascalsche Schnecke(3) nicht nur aus dem Kreis (1), sondern auch aus dem dazu bezüglich F' symmetrischen Kreis projiziert. Die Projektionskurven der Kreise und Geraden (Fig.12), also die Schnecken und Parabeln, werden sich in vier Punkten schneiden, da von den 8 Punkten $P_1', P_2', \ldots P_4''$ je zwei denselben Punkt ergeben. Aus der Figur der m Grundkurven ist ersichtlich dass wegen der Konformität sich Parabeln und Schnecken nur in den Punkten P_1 und P_2, nicht aber in P_3 und P_4 rechtwinklig schneiden. Nimmt man nun r und φ veränderlich, pe projiziert also Nullpunktskreise und Ursprungsgerade, so erhält man die Scharen

der Parablen und Schnecken, die beide konfokal, aber nur teilweise orthogonal sind; sie bilden somit ein Beispiel eines unvollständigen Orthogonalsystems.

1o.) Orthogonalsysteme werden in der Abbildung durch $w = z^2$ somit nur dann vollständig, wenn die beiden Scharen, an F' gespiegelt, in sich selbst übergehen, wie dies bei den Kreissystemen mit den festen Punkten D' und D" (Fig.13) der Fall ist.

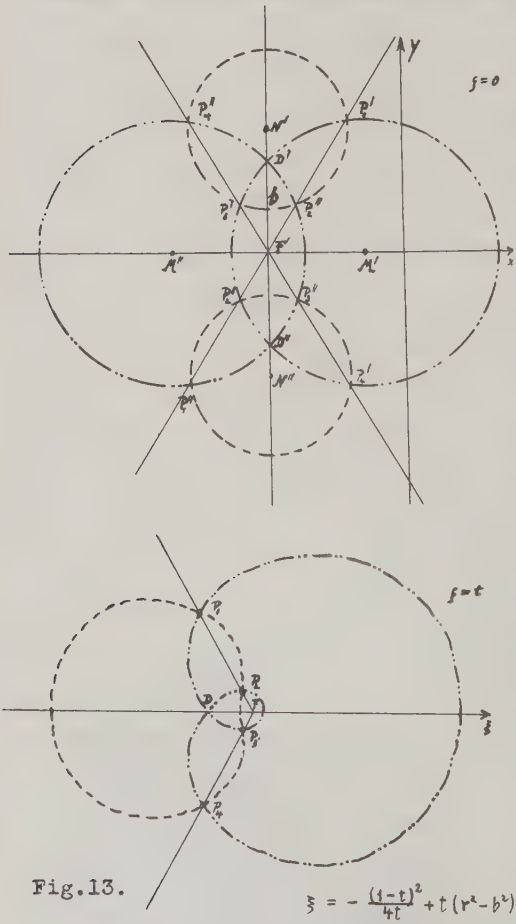

Fig.13.

Von den 8 Schnittpunkten dieser Figur gehen wieder nach 6) je zwei denselben Punkt der Ebene $\zeta = t$, so dass die Projektionskurven in den vier gemeinsamen Punkten, die immer reell sein müssen, wegen Satz III orthogonal sind. Ist $F'D' = b$, so haben die Kreissysteme bei Veränderlichem r und r' die Gleichungen

$$x = \sqrt{r^2 - b^2} - \frac{1-t}{2t} + r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

bezw.

$$x = -\frac{1-t}{2t} + r'\cos\varphi'$$

$$y = \sqrt{r'^2 + b^2} + r'\sin\varphi'$$

und projizieren sich daher nach § 4 (3) in die Kurvenscharen

$$\xi = -\frac{(1-t)^2}{4t} + t(r^2 - b^2) + 2rt\sqrt{r^2 - b^2}\cdot\cos\varphi + r^2 t\cos 2\varphi$$

$$\eta = 2rt\sqrt{r^2 - b^2}\cdot\sin\varphi + r^2 t\sin 2\varphi$$

bezw.
$$\xi = -\frac{(1-t)^2}{4t} - t(r'^2+b^2) - 2r't\sqrt{r'^2+b^2}\cdot\sin\varphi' + r'^2t\cdot\cos 2\varphi'$$
$$\eta = 2r't\sqrt{r'^2+b^2}\cdot\cos\varphi' + r'^2t\cdot\sin 2\varphi'$$

die sich durch dieselbe Rechnung wie in 1) als Pascalsche Schnecken ergeben. Berechnet man wie in 1) die Doppelpunkte, so ergibt sich für beide Scharen derselbe Punkt

$$\xi = -\frac{(1-t)^2}{4t} - b^2t \qquad (7)$$
$$\eta = 0,$$

der also von r und r' unabhängig ist. Da die beiden Scharen nach Satz IV. konfokal sind, so ist damit gezeigt, dass Pascalsche Schnecken mit gemeinsamen Doppel - und Brennpunkt ((jedoch verschiedenen, ausserordentlichen Brennpunkten) ein vollständiges Orthogonalsystem bilden, ähnlich wie dies bei den Parabeln in 7) der Fall war.

Für den Wert b = o erhält man als Grundkurven zwei para - bolische Kreisbüschel und als Projektionskurven, da jetzt Brenn- und Doppelpunkt zusammen fallen ((4) und (7),), Kardioiden mit gemeinsamer Symmentrieachse, die also ebenfalls ein vollstän - diges Ortnogonalsystem bilden.

Aus Fig. 13 kann noch eine Beziehung zwischen den Schnecken abgeleitet werden; denkt man sich nämlich auf die Kreise die Transformation durch reziproke Radien bezüglich des Kreises um F' mit Radius B'D' angewandt, so bleibt die Figur erhalten, nur dass die Kreise um M' und M" vertauscht werden, während der Kreis in N' in sich übergeht. Daraus ergibt sich, dass sich P_2'' nach P_1' abbilden muss und dass daher die drei Punkte F', P_2'' u. P_1' in einer Geraden liegen. Nun projiziert sich eine Gerade durch F' aber in einen Strahl durch F, sodass also die drei Punkte P_1, P_2 und F auch in einer Geraden liegen müssen. Haben so-

mit zwei Pascalsche Schnecken denselben Doppel - und Brenn - punkt, sodass der Doppelpunkt für die eine Kurve Knoten und für die andere Einsiedler ist, so schneiden sie sich in vier reellen Punkten je rechtwinklig und zwar so, dass die Verbindungsgerade eines Schnittpunktes mit dem Brennpunkt durch einen zweiten Schnittpunkt geht.

§ 1o. Als ein zweites Beispiel diene die Projektion durch das System $w = \frac{1}{z}$, dessen Brennlinie in § 6,3 betrachtet worden ist. Da jede Ebene $\zeta = t$ diese Brennlinie in zwei reellen und zwei imaginären Punkten schneidet, so haben die Projektions - kurven ausnahmslos mindestens diese Schnittpunkte als Brenn - punkte, bezüglich deren sie alle konfokal sind(Satz IV).

1.) Um zu übersehen, welche Punkte der xy-Ebene sich in denselben Punkt der Ebene $\zeta = t$ abbilden, sucht man wieder die Bedingung,unter der sich zwei Systemstranlen schneiden. Von $P'(x_1,y_1)$ gehe ein Strahl aus; es ist nun ein Punkt $P''(x,y)$ so zu bestimmen, dass der von ihm ausgehende Strahl den ersten schneidet. Aus der Bedingung § 3(1) folgt dann, da $u = \frac{x}{x^2+y^2}$ u. $v = \frac{-y}{x^2+y^2}$ ist,

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{x_1}{x_1^2+y_1^2}\right)(y-y_1) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{y_1}{x_1^2+y_1^2}\right)(x-x_1)$$

oder

$$\left[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\right](xy_1 + x_1y) = 0;$$

abgesehen von dem ersten Faktor,der auf die Brennlinie führt (§ 4; § 9,5), ist also der geometrische Ort von P" die Gerade

$$xy_1 + x_1y = 0. \qquad (1)$$

Um nun noch denjenigen Punkt dieser Geraden zu finden, dessen Strahl den von P' ausgehenden in der Ebene $\zeta = t$ trifft, setzt man $x = \sigma \cdot x_1$ und $y = -\sigma y_1$, projiziert diesen Punkt nach $\zeta = t$ und lässt die Projektion mit der von P' zusammenfallen; auf diese Weise findet man nach Y§ 4 (3)

$$\sigma x_1 (1-t) + \frac{t x_1}{\sigma (x_1^2 + y_1^2)} = x_1 (1-t) + \frac{t x_1}{x_1^2 + y_1^2}$$

$$\sigma = \frac{t}{(1-t)(x_1^2 + y_1^2)}$$

und damit

$$x = \frac{t x_1}{(1-t)(x_1^2 + y_1^2)}$$

$$y = \frac{-t y_1}{(1-t)(x_1^2 + y_1^2)} \qquad (2)$$

Sind F_1' und F_2' die Punkte der xy-Ebene, die durch Projektion die reellen Brennpunkte der Ebene $\zeta = t$ ergeben, d.h.von denen diejenigen Tangenten der Brennlinie ausgehen, deren Berühr - punkte in der Ebene $\zeta = t$ liegen, so folgt aus der zweiten Gleichung (1) § 1 wegen $\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ (§ 6, 3)

$$x^2 = \frac{t}{1-t} = \overline{O'F_1'}^2 \qquad (3)$$

Quadriert und addiert man (?) so kommt

$$x^2 + y^2 = \frac{t^2}{(1-t)^2 (x_1^2 + y_1^2)}$$

oder

$$\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \frac{t}{1-t}; \qquad (4)$$

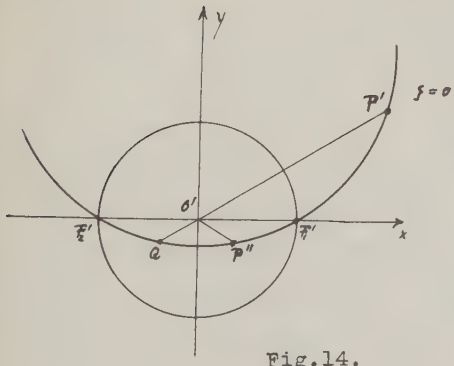

Fig.14.

schneidet somit O'P' den durch F_1', F_2' und P' gelegten Kreis in Q, so ist der zu Q bezüglich der y-Achse symmetrische Punkt der Gesuchte, d.h. die von P' und P" ausgehenden Strahlen des Systems schneiden sich in der Ebene $\zeta = t$. P" geht aus P' durch Abbildung mittels reziproker Radien bezüglich des Kreises O' mit Radius $O'F_1'$ und darauffolgender Spiegelung an der x-Achse hervor. Gehen also durch diese zwei Transformationen zwei Kurven der xy-Ebene in einander über, so ergeben sie dieselbe Projektionskurve.

2.) Hat der Punkt P' die Polarkoordinaten (r, φ), so projiziert er sich ebenso wie P" (Fig.14) in dem Punkt P

$$\begin{aligned} \xi &= \left[r(1-t) + \tfrac{t}{r}\right]\cdot\cos\varphi \\ \eta &= \left[r(1-t) - \tfrac{t}{r}\right]\cdot\sin\varphi \\ \zeta &= t; \end{aligned} \qquad (5)$$

wählt man P' auf dem Kreis um O' mit Radius $O'F_1'$, setzt also nach (3) $r = \sqrt{\frac{t}{1-t}}$

so ergibt sich $\xi = 2\sqrt{t(1-t)}\cdot\cos\varphi$

$\eta = 0,$

d.h. der Ursprungskreis durch F_1' projiziert sich in die Strecke EF_2 der ξ-Achse zwischen den Brennpunkten, da aus § 1 (1) für $U = \frac{1}{x}$

$$\xi = 2\sqrt{t(1-t)} = OF_1 \qquad (6)$$

folgt. Der übrige Teil der ξ-Achse wird durch Abbildung der x-Achse erhalten, da aus (5) für $\varphi = 0$

$$\begin{aligned} \xi &= r(1-t) + \tfrac{t}{r} \\ \eta &= 0 \end{aligned}$$

kommt.

3.) Nimmt man (5) r constant, projiziert also einen Ursprungskreis der xy-Ebene, so stellen die Gleichungen(5) eine Ellipse dar; diese wird, wie aus 1) folgt, auch durch den Kreis mit Radius $r' = \frac{t}{r(1-t)}$ erhalten, da nach (4) $rr' = \frac{t}{1-t}$ sein muss. Ist umgekehrt in (5) r veränderlich und φ constant, so ergeben diese Gleichungen die Hyperbel

$$\frac{\xi^2}{4t(1-t)\cos^2\varphi} - \frac{\eta^2}{4t(1-t)\sin^2\varphi} = 1,$$

die auch durch Projektion der Geraden $y = -x\,tg\,\varphi$ erhalten wird. Ellipse und Hyperbel müssen sich daher in allen vier Schnittpunkten senkrecht schneiden, da in den 8 Punkten $P_1'P_2', \ldots P_4''$, von denen je zwei denselben Punkt ergeben, sich die Krei-

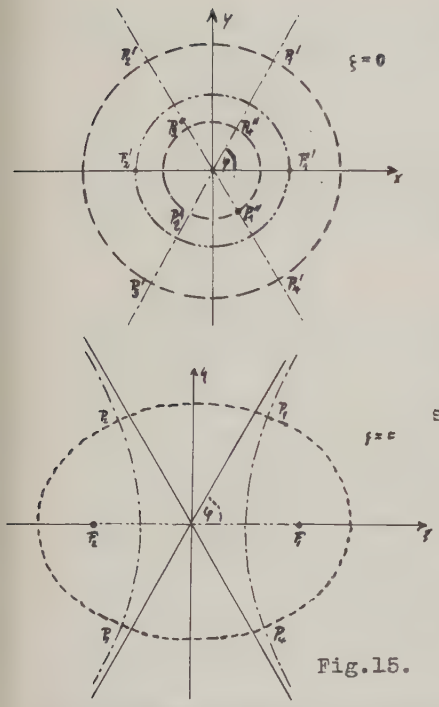

Fig.15.

se und Geraden senkrecht schneiden. Das System der Ursprungs - kreise und - Gerade projiziert sich also in das System konfokaler Mittelpunktskegelschnitte, die ein vollständiges Orthogonalsystem bilden, da die verschiedenen Grundkurven, die dieselbe Projektions - kurve haben, je derselben Kurven - schar angehören.

4.) Sucht man einen beliebigen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der x-Achse liegt, abzubilden, so ergibt sich nach 1) dass die Abbildungskurve noch durch einen zweiten Kreis erhalten wird, der ebenfalls symmetrisch zur x-Achse ist. Die Schnittpunkte D' u. D" derselben, die auf dem Kreis um O' mit $O'F_1'$ liegen müssen, (Fig. 16) ergeben durch Projektion den Doppelpunkt D, da die von D' und D" ausgehenden Strahlen den beiden projizierenden Regelscharen gemeinsam sind, und sich nach 1) in der Ebene $\zeta = t$ treffen. Der Lage des ersten Kreises M' (Fig.16) zu Kreis O' entsprechend kann es daher drei Arten singulärer Punkte D geben; im Falle der Spitze fällt dann mit dieser ein Brennpunkt zusammen, da sich dann alle Kreise in F_1' oder F_2' berühren. Die beiden Kreise schneiden sich jedoch ausser in D' und D" noch in den Kreispunkten ; da diese bei der Projektion erhalten bleiben, so hat die Projektionskurve dort je einen singulären Punkt. Die beiden Mittelpunkte M_1' und M_2' ergeben

die beiden ausserordentlichen Brennpunkte. Man kann also aus der geometrischen Erzeugung heraus feststellen, dass man Kurven mit zwei Brennpunkten, zwei i.a. davon verschiedenen ausser - ordentlichen Brennpunkten und drei Doppelpunkten (davon zwei in den Kreispunkten) erhält, während man bei anderer Erzeu - gungsart diese Eigenschaften nur aus der Gleichung entnehmen kann.

Besondere Kurven werden sich ergeben, wenn die Mittel - punkte M_1' M_2' zusammen fallen , oder wenn M_1' nach F_1' und M_2' nach F_2' fällt; in erstem Fall ergeben sich wie schon gezeigt, Ellipsen, während der zweite Fall wie aus 8) folgen wird, Lemnis - katen ergibt, bei denen also die ausserordentlichen Brenn - punkte mit den anderen zusammen fallen. Ein weiterer Ausnahme - fall kann eintreten, wenn der erste Kreis durch Abbildung mit- tels reziproker Radien in der xy-Ebene keinen Kreis, sondern eine Gerade ergibt; dies ist dann der Fall, wenn der Kreis M_1' durch O' geht. Die jetzt entstehenden Kurven haben in den Kreispunkten einfache Punkte und ausserdem nur einen ausser - ordentlichen Brennpunkt; es sind, wie hier nur berichtet wer- den soll, die sog.Sluseschen Konchoiden. Die Brennpunktsver - hältnisse der Strophoide, der Kissoide des Diokles etc.können nun unmittelbar aus der Betrachtung der Lage der Grundkurven zu einander abgeleitet werden.

5.) Um die allgemeinen Kurven genauer betrachten zu können, bildet man nach §4 (3) ihre Gleichung ; ist der Grundkreis durch die Punkte $A_1'(0,a)$ und $A_2'(0,-a)$ der y-Achse gelegt u. schliesst der Strahl $A_1'M_1'$ mit der negativen x-Achse den Winkel φ ein, so heisst die Grundkurve

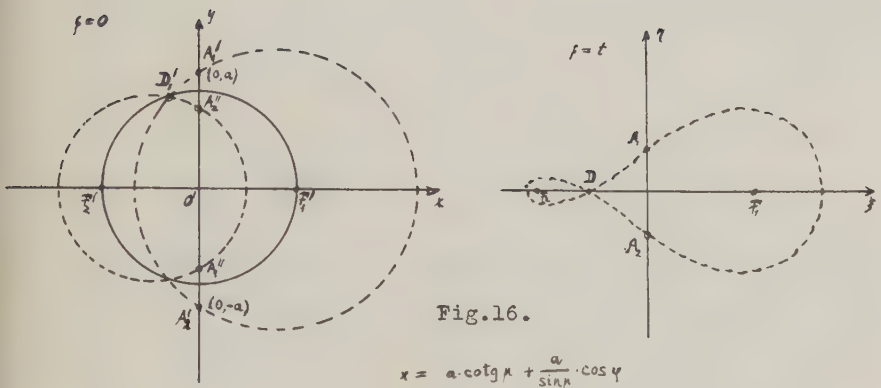

Fig.16.

$$x = a\cdot\operatorname{cotg}\mu + \frac{a}{\sin\mu}\cdot\cos\varphi$$
$$y = \frac{a}{\sin\mu}\cdot\sin\varphi \qquad (7)$$

und damit ergibt sich

$$\xi = a(1-t)\operatorname{cotg}\mu + \frac{a(1-t)}{\sin\mu}\cos\varphi + \frac{t\cdot\sin\mu\,(\cos\mu+\cos\varphi)}{a(1+\cos^2\mu+2\cos\mu\cdot\cos\varphi)}$$
$$\eta = \sin\varphi\cdot\left[\frac{a(1-t)}{\sin\mu} - \frac{t\sin\mu}{a(1+\cos^2\mu+2\cos\mu\cdot\cos\varphi)}\right].$$

Nach 4) und 2) muss die Kurve auf der ξ-Achse einen Doppelpunkt haben; dieser hat, wie sich aus $\eta = 0$ ergibt, die Koordinaten

$$\xi = \frac{t - a^2(1-t)}{a\cos\mu}\cdot\sin\mu \qquad (8)$$
$$\eta = 0.$$

Fünrt man bezüglich dieses Punktes Polarkoordinaten (ϱ, ϑ) in der $\xi\eta$ - Ebene ein, so kommt durch Elimination von φ

$$\varrho = \frac{\left[a^2(1-t)-t\right]\cos\vartheta \pm \left[a^2(1-t)+t\right]\sqrt{\cos^2\vartheta - \sin^2\mu}}{a\sin\mu\cos\mu} \qquad (9')$$

oder in rechtwinkligen Koordinaten

$$a^2(\xi^2+\eta^2)^2\sin^2\mu\cdot\cos^2\mu - 2a\xi(\xi^2+\eta^2)\left[a^2(1-t)-t\right]\sin\mu\cos\mu$$
$$+\xi^2\left[\left(a^2(1-t)+t\right)^2\sin^2\mu - 4a^2t(1-t)\right] + \eta^2\left[a^2(1-t)+t\right]^2\sin^2\mu = 0. \qquad (9'')$$

Aus der Gleichung (9") folgt nun, dass sämtliche Projektionskurven als Fusspunktskurven von Kegelschnitten aufgefasst werden können; sind A und B die Halbachsen einer Hyperbel u. (α, β) die Mittelpunktskoordinaten derselben, so ist die

Gleichung der Fusspunktskurve (vergl. Wieleitner,Spez.Ebene Kurven S.5)

$$(\xi^2+\eta^2)^2 - 2\alpha\xi(\xi^2+\eta^2) + (\alpha^2-A^2)\xi^2 + B^2\eta^2 = 0.$$

Der Vergleich mit (9") liefert dann

$$A = \frac{a^2(1-t)+t}{a\cdot\sin\mu} \qquad \alpha = \frac{a^2(1-t)-t}{a\cdot\sin\mu\cos\mu} \qquad (10)$$

$$B = \frac{a^2(1-t)+t}{a\cos\mu} \qquad \beta = 0,$$

woraus folgt, dass man Fusspunktskurven der Hyperbel erhält, wenn der Grundkreis die y-Achse trifft (a reell) , solche der Ellipse, wenn a und damit auch μ imaginär werden.

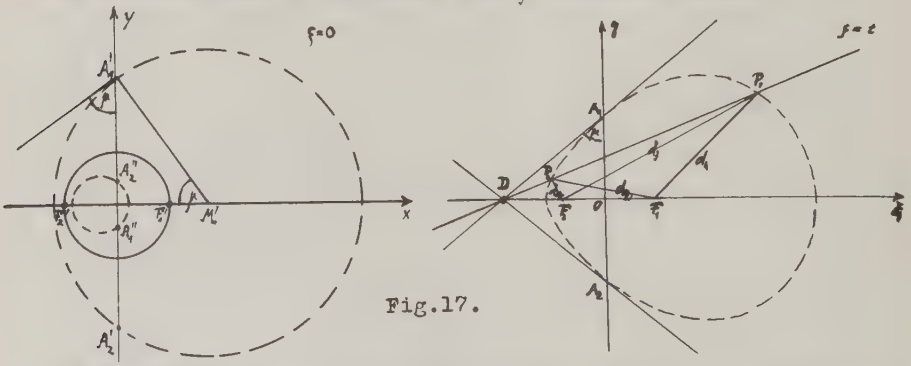

Fig.17.

Die Projektionen A_1 und A_2 der Punkte (0,a) und (0,-a) können als Scheitel der Kurve aufgefasst werden, da sie die Berühr - punkte der vom Doppelpunkt an die Kurve gelegten Tangenten sind. Zum Beweis braucht man nur zu beachten, dass A_1 die Koordinaten (§ 4 (3))

$$\xi = 0 \qquad \eta = \frac{a^2(1-t)-t}{a} \qquad (11)$$

hat und dass der Winkel der Tangenten mit der η-Achse in A_1 der Konformität wegen gleich denjeneigen in A_1', also gleich μ ist; die von der Tangente auf der ξ-Achse abgeschnittene Stück ist daher $-\frac{a^2(1-t)-t}{a}\cdot tg\,\mu$, welcher Wert mit (8) übereinstimmt. Ferner haben die Brennpunkte von A_1 und A_2 die-

selbe Entfernung, liegen also auf einem Kreis um die Scheitel mit dem Halbmesser $\frac{a^2(1-t)+t}{a}$, wie aus Dreieck A_1OF_1 mittels (6) und (11) folgt (Fig.17). Der Name Scheitel rührt daher, dass diese Punkte in die Ellipsenscheitel übergehen, wenn der Doppelpunkt in das Unendliche rückt. S

6.) Schneidet ein beliebiger Strahl durch den Doppelpunkt die Kurve in P_1 und P_2, und setzt man DP_1 gleich ϱ_1 und DP_2 gleich ϱ_2, so besteht zwischen diesen Radien die Beziehung

$$a^4 t(1-t)(\varrho_1-\varrho_2)^2 + a^2\left[a^2(1-t)+t\right]^2 \varrho_1\varrho_2 = \frac{\left[a^4(1-t)^2 - t^2\right]^2}{\cos^2\mu}; \qquad (12)$$

diese Formel kann sofort durch Einsetzen der Werte aus (9') bewiesen werden. Benützt man die Ergebenisse von 5), so kommt

$$\overline{OF_1}^2(\varrho_1-\varrho_2)^2 + 4\overline{A_1F_1}^2\varrho_1\varrho_2 = 4\cdot\overline{A_1D}^2\cdot\overline{A_1F_1}^2 \qquad (12')$$

7.) Bezeichnen d_1d_2 die Entfernungen des Brennpunktes F_1 von P_1P_2, d_3d_4 diejenigen des zweiten Brennpunktes F_2 von diesen Punkten (Fig.17), so können aus den Dreiecken DF_1P_1, DF_1P_2, DF_2P_1, u. DF_2P_2 diese Strecken mittels des Cosinussatzes unter Benützung der Gleichungen (6,) (8) und (9') berechnet werden. Diese so gefundenen Werte sind nun von einander abhängig und zwar besteht, wie sich wiederum durch Einsetzen der Werte von d_1, d_2, d_3, d_4 nachweisen lässt, die Beziehung

$$\begin{aligned} a^4 t(1-t)\cos 2\mu\left[(d_1+d_2)^2+(d_3+d_4)^2\right] - a^2\left[a^2(1-t)+t\right]^2\cos^2\mu\left[d_1d_2+d_3d_4\right] \\ +2\left[a^2(1-t)+t\right]^2\left[4a^2t(1-t)\sin^2\mu + (a^2(1-t)-t)^2\cos^2\mu\right] = 0 \end{aligned} \qquad (13)$$

oder unter Benützung von 5)

$$\begin{aligned} \overline{OF_1}^2\left(\overline{OD}^2 - \overline{OA_1}^2\right)\left[(d_1+d_2)^2+(d_3+d_4)^2\right] + 4\overline{A_1F_1}^2\cdot\overline{OA_1}^2\left(d_1d_2+d_3d_4\right) \\ -8\cdot\overline{A_1F_1}^2\left(\overline{OF_1}^2\cdot\overline{OD}^2 + \overline{OA_1}^4\right) = 0. \end{aligned} \qquad (13')$$

Projiziert man einen zur x-Achse symmetrischen Kreis (7) der xy-Ebene auf eine Ebene $\xi = t$, und zieht durch den Doppelpunkt der Projektionskurve eine beliebige Gerade, so besteht zwi-

schen den Entfernungen der Schnittpunkte von den Brennpunkten die Beziehung (13).

8.) Für einige Sonderfälle erhält dieses Gesetz eine einfachere Form. Setzt man z.B. $\mu = 90^\circ$, so wird der Kreis (7) ein Ursprungskreis und die Projektionskurve daher nach 3) eine Ellipse. Der Doppelpunkt fällt, da die beiden Grundkreise jetzt konzentrisch werden (Fig.15), in das Unendliche, wie auch aus (8) folgt. Die Gerade durch D wird daher parallel zur ξ -Achse und es ist dann, wie aus Fig.18 folgt,

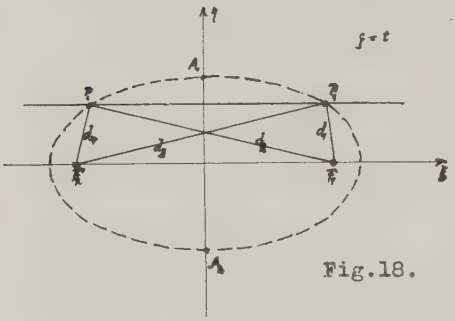

Fig.18.

$$d_1 = d_4$$

$$d_2 = d_3.$$

Das Gesetz (13') ergibt damit

$$d_1 + d_3 = 2 \cdot A_1 F_1 ;$$

dies ist, da A_1 und A_2 nach der Erklärung 5) die Nebenscheitel der Ellipse sind, die bekannte Brennpunktseigenschaft, die somit ein besonderer Fall der Formel (13) ist.

Wählt man den Grundkreis so, dass die Punkte A_1' und D' (Fig.16) zusammenfallen, so folgt nach (3) $a = \sqrt{\frac{t}{1-t}}$ und damit aus (9'')

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 = \frac{4t(1-t)}{\sin^2\mu \cdot \cos^2\mu}\left[\xi^2\cos^2\mu - \eta^2\sin^2\mu\right]. \qquad (14)$$

Für diese Kurve ist aus Symmetrie

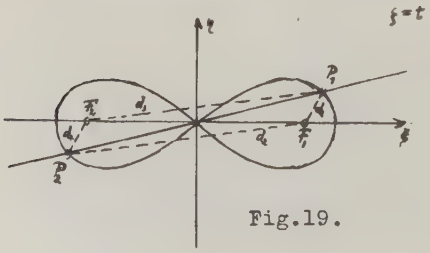

Fig.19.

$$d_1 = d_4$$

und

$$d_2 = d_3$$

und daher ergibt sich aus (13)

$$\cos 2\mu\,(d_1 + d_3)^2 - 4\cos^2\mu \cdot d_1 d_3 + 16\,t(1-t)\sin^2\mu = 0.$$

Wird hierin noch $\mu = 45^\circ$ gesetzt d.h. wird die Kurve (14) zur Lemniskate, so ergibt das

Brennstrahlen-Gesetz (13)

$$d_1 \cdot d_2 = 4t(1-t) = \overline{OE}^2$$

9.) Projiziert man zwei Orthogonale Kreisbüschel, so bilden (vergl.§ 9) die Abbildungen nur dann ein vollständiges Orthogonalsystem, wenn die projizierenden Kreise, die dieselbe Kurve ergeben, derselben Kreisschar angehören(Satz V); dies ist nach 1) z.B. bei der Kreisschar Fig.2o der Fall,wo die Grundpunkte der Büschel die Schnittpunkte des Kreises und O' mit Radius O'E_1' mit der y-Achse sind. Das elliptische Kreis - büschel liefertb die Kurven (14), die, wie aus (1o) folgt, Fusspunktskurven von Hyperbeln bezüglich des Mittelpunktes derselben sind. Die Kurven der Schar haben denselben Doppelpunkt und sind konfokal. Das hyperbolische Kreisbüschel kann wegen (3) durch die Gleichungen

$$x = \sqrt{\frac{t}{1-t}} \cdot \operatorname{cotg} \nu \cdot \cos\varphi$$
$$y = \sqrt{\frac{t}{1-t}} \cdot \frac{1+\cos\nu\cdot\sin\varphi}{\sin\nu}$$

dargestellt werden ; projiziert man auf die Ebene $\zeta = t$, so kommt (§ 4)(3))

$$\xi = 2\sqrt{t(1-t)} \cdot \frac{\cos\nu\cdot\cos\varphi\cdot(1+\cos\nu\cdot\sin\varphi)}{\sin\nu(1+\cos^2\nu+2\cos\nu\cdot\sin\varphi)}$$
$$\eta = 2\sqrt{t(1-t)} \cdot \frac{\cos\nu\cdot(\cos\nu+\sin\varphi)(1+\cos\nu\cdot\sin\varphi)}{\sin\nu(1+\cos^2\nu+2\cos\nu\cdot\sin\varphi)}$$

woraus durch Elimination von φ

$$(\xi^2+\eta^2)^2 = 4t(1-t)\cdot\operatorname{cotg}^2\nu\cdot(\xi^2\sin^2\nu+\eta^2) \qquad (15)$$

folgt. Die Projektionen sind somit Fusspunktskurven von Ellipsen, bezüglich des Mittelpunktes; für die Halbachsen der Ellipsen ergibt der Vergleich (Wieleitner,Spez.ebene Kurven,S.12 f)

$$A^2 = 4t(1-t)\cdot\cos^2\nu$$
$$B^2 = 4t(1-t)\cdot\operatorname{cotg}^2\nu.$$

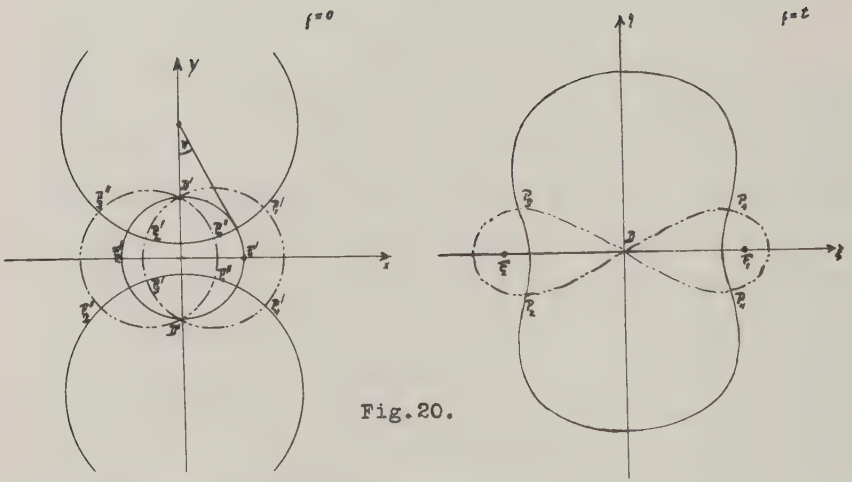

Fig.20.

Eliminiert man r, so kommt die Beziehung

$$A \cdot B = 2\sqrt{t(1-t)} \cdot \sqrt{B^2 - A^2}. \qquad (16)$$

Da nach (6) $2\sqrt{t(1-t}$ die Brennweite OF, der Projektionskurven und da $\sqrt{B^2-A^2}$ diejenige der Ellipsen ist, sonbesagt (16), dass das Rechteck aus den Halbachsen einer Ellipse gleich dem Rechteck aus den Brennweiten der Ellipse und ihrer Fusspunktskurve bezüglich des Mittelpunktes ist. Dieselbe Eigenschaft besteht auch für die Kurven (14), wie sich durch Elimination von (lo) μ ergibt, wenn man dort $a = \sqrt{\frac{t}{1-t}}$ setzt.

Als Ergebnis folgt also, dass die Fusspunktskurven der Mittelpunktskegelschnitte bezüglich des Mittelpunktes mit dem gleichen singulären Punkt dann ein vollständiges Orthogonalsystem bilden, wenn sie konfokal sind.

lo.) Als Abschluss seien noch die Projektionen von Ursprungskreisen der xy-Ebene durch analytische Strahlensysteme betrachtet, die durch die Funkrionen $w = z^n$ erhalten werden;

sind (r, φ) Polarkoordinaten der xy-Ebene, so ergibt sich

$$u = r^n \cos n\varphi$$
$$v = r^n \sin n\varphi$$

und damit nach § 4 (3) als Gleichung der Projektionskurven

$$\begin{aligned} \xi &= r(1-t)\cos\varphi + r^n t \cos n\varphi \\ \eta &= r(1-t)\sin\varphi + r^n t \sin n\varphi \\ \zeta &= t. \end{aligned} \tag{17}$$

Um die Natur dieser Kurven zu übersehen, vergleicht man die Gleichungen (17) mit denen der Rollkurven, die durch Abrollen eines Kreises längs eines festen Kreises entstehen.

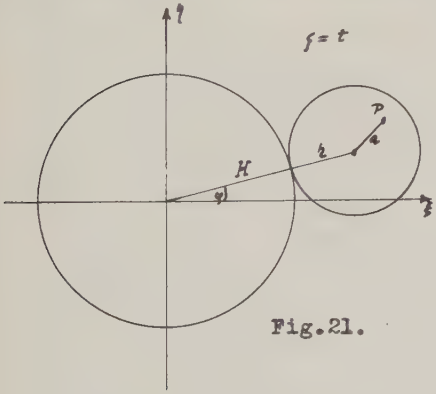

Fig.21.

Ist H der Radius des Festen, h derjenige des abrollenden Kreises und a die Entfernung des die Kurve beschreibenden Punktes vom Mittelpunkt des beweglichen Kreises, so hat die Rollkurve die Gleichungen

$$\begin{aligned} \xi &= (H+h)\cos\varphi + a\cos\tfrac{H+h}{h}\varphi \\ \eta &= (H+h)\sin\varphi + a\sin\tfrac{H+h}{h}\varphi . \end{aligned} \tag{18}$$

Durch Vergleich von (17) und (18) ergibt sich

$$\begin{aligned} H &= (1-t)(n-1)\tfrac{r}{n} \\ h &= (1-t)\tfrac{r}{n} \\ a &= r^n t, \end{aligned} \tag{19}$$

woraus ersichtlich ist, dass die Kurven (17) für positives n Epizykloiden, für negatives n dagegen Hypozykloiden darstellen. Die Rollkurven lassen sich somit aus besonderen analytischen Strahlensysteme ableiten; besonders die Angabe der Brennpunkte gestaltet sich übersichtlich, da dieselben die Schnittpunkte der Projektionsebene mit der Brennlinie

des betreffenden Systems sind. Für diese Punkte kann bei den Systemen $w = z^n$ eine allgemeine Darstellung gegeben werden; bildet man nach § 4 (3) $\xi + i\eta = z(1-t) + t z^n$

und daraus $\frac{d(\xi + i\eta)}{dz} = 1 - t + n t z^{n-1}$,

so muss nach § 5 diese Ableitung verschwinden, woraus sich

$$z = \sqrt[n-1]{\frac{t-1}{nt}} \qquad (20)$$

und damit $\xi + i\eta = \frac{(1-t)(n-1)}{n} \cdot \sqrt[n-1]{\frac{t-1}{nt}}$

ergibt. Projiziert man den besonderen Kreis $r = \left|\sqrt[n-1]{\frac{t-1}{nt}}\right|$, so müssen die Brennpunkte auf der Projektionskurve liegen und zwar, wie aus (19) folgt, im Abstand $H = |\xi + i\eta| = \left|\frac{(1-t)(n-1)}{n} \cdot \sqrt[n-1]{\frac{t-1}{nt}}\right|$ vom Ursprung; da für diesen Fall ferner $a = h$ wird, so sind die Doppelpunkte Spitzen, die mit den Brennpunkten zusammenfallen. Die Darstellung (17), die durch die Strahlensysteme erhalten wurde, hat gegenüber (18) den Vorteil, dass die betreffenden Kurven bezüglich der Punkte (2o) konfokal sind; ferner sind durch die Art des Strahlensystems die Gründe offen liegend, ob das zu (17) orthonale Systeme überall Orthogonalität auf - weist oder nicht, wie die Beispiele § 9,9 und § 10,3 für $n = 2$ bezw. $n = -1$ zeigen. Endlich können die Rollkurven als besondere Fälle allgemeinerer Kurven untersucht werden, indem man beliebige Kreise der xy-Ebene projiziert, wie dies z.B. in § 10,4 geschehen ist; die Rollkurven, also dort die Ellipsen, ergaben sich als Sonderfälle der Fusspunktskurven der Kegel - schnitte und der Satz, dass die Summe der Brennpunktsabstände constant ist, war ein besonderer Fall der Formel (13). Eine solche Verallgemeinerung ist aus der Darstellung(18) nicht ohne Weiteres möglich, während sie bei der Erzeugung der Kurven durch analytische Strahlensysteme naheliegend ist.

Literaturangaben.

1.) Kommerell, Spezielle Flächen und Theorie der Strahlensysteme.

2.) Wieleitner, Spezielle ebene Kurven.

3.) Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes(5.Aufl.)

4.) Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der Kegelschnitte.

5.) Pascal,Repertorium der höheren Mathematik II.

6.) van Uven, Ak.Verh.10,(1910) Amsterdam.

L e b e n s l a u f .

Ich bin am 13. April 1899 als Sohn des Kaufmanns Carl Lambacher in Stuttgart geboren und besuchte von 1906 bis 1918 die Elementarschule und das Dillmann-Realgymnasium daselbst, wo ich 1918 die Reifeprüfung ablegte. Nach kurzer Militärzeit studierte ich 1919 bis 1921 und 1922 an der Technischen Hochschule Stuttgart, 1921 an der Universität Tübingen. 1922 legte ich die I., 1923 die II. Dienstprüfung für das höhere Lehramt in Mathematik und Physik ab.

Meinen Lehrern Prof.Dr. Abraham, Prof.Dr. Hessenberg, Prof.Dr. Koch, Prof.Dr. Kommerell, Prof.Dr. Kutta, Prof. Dr. Maurer, Prof.Dr. Mehmke, Prof.Dr. Paschen, Prof.Dr. Regener und Prof.Dr. Reichenbach spreche ich an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank aus.

Druck der Omnitypie Ges. Nachf. L. Zechnall Stuttgart